数理解析研究所講究録
499巻 1983年 166-175

関数方程式の確率分布論への応用

統計数理研　清水良一　(Ryoichi Shimizu)

与えられた性質をもつ確率分布を決定することが問題である．多くの場合，その性質は分布関数 $F(x)=P_r\{X\leq x\}$ あるいは特性関数（以下 ch. f. と略す） $\varphi(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}dF(x)$ などに関する方程式として記述される．これらの関数は，一定の条件を満たさなければならないから，問題はある種の制約条件つきの関数方程式に帰着する．以下にいくつかの例をあげる．

§1.　$\mathbb{X}=(X_1, X_2, X_3)$ は3次元空間を運動する粒子のある時刻における速度を，直交座標系 $\Sigma=(0; e_1, e_2, e_3)$ について表示したものとし，次のことを仮定する．

a)　X_1, X_2, X_3 は互いに独立で，同じ分布 F に従う確率変数である．

b)　Σ と異なる座標系 $\Sigma'=(0; e'_1, e'_2, e'_3)$ があって，$\mathbb{X}$ の e'_1, e'_2 への射影 Y_1, Y_2 が互いに独立である．

このとき，X_j の分布 F について何がいえるだろうか？

この問題は，分布Fの $ch.f.$ $\varphi(t)$ を使って記述することができるが，これを次のようにもっと一般化しておく．$\varphi_1(t),\cdots,$ $\varphi_n(t)$ は $ch.f.$，$a_1,\cdots,a_n$；$b_1,\cdots,b_n$ は0でない実数の組とする．方程式

$$(1)\qquad \prod_{j=1}^{n}\varphi_j(a_j u+b_j v)=\prod_{j=1}^{n}\varphi_j(a_j u)\prod_{j=1}^{n}\varphi_j(b_j v),$$

を考える．上記の条件 a)，b) はこの方程式のある特別な場合と同等である．これはいわゆる *Cauchy's equation* の一種で，これから

$$\prod_{j=1}^{n}\varphi_j(a_j t)=exp\{Q(t)\},$$

を導くことができる．ただしQは高々 n 次の多項式である．a_j が他の a と異なるなら，$\varphi_j(t)$ 自身がこの形に書けるが，一般の場合に $\varphi_1(t),\cdots,\varphi_n(t)$ を決定するためには，$ch.f.$ に関する次の定理を必要とする．

定理1（[4]）．　$\varphi(t)=exp\{$多項式$\}$ が $ch.f.$ なら，この多項式は2次式で，$\varphi(t)$ は正規分布の $ch.f.$ である．

定理2（[1]）．　$\varphi(t)$，$\psi(t)$ が共に $ch.f.$ で，かつ $\varphi(t)\cdot\psi(t)$ が正規分布の $ch.f.$ なら，$\varphi(t)$，$\psi(t)$ はともに正規分布である．

かくして，関数方程式 (1) の解は，

$$\varphi_j(t) = \exp\left\{i\mu_j t - \frac{1}{2}\sigma_j^2 t^2\right\}, \quad j = 1, \cdots, n$$

とくに，条件 a), b) と満足する分布 F は正規分布である（〔2〕,〔12〕,〔3〕).

§2. $X_1, X_2, \cdots, X_n$ が分布 F からの無作為標本で，$a_1, \cdots, a_n$ は 0 でない実数とする．"一次統計量 $a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_nX_n$ が X_1 と同じ分布に従う，" という性質は F の ch.f. $\varphi(t)$ を使って，

$$\text{(2)} \qquad \varphi(t) = \prod_{j=1}^{n} \varphi(a_j t)$$

と書くことができる．すぐ分るように，F が一点に退化していなければ —— すなわち，$|\varphi(t)| \neq 1$ ならば —— $|a_j| < 1$, $j = 1, \cdots, n$ である．したがって，

$$\text{(3)} \qquad |a_1|^\alpha + \cdots + |a_n|^\alpha = 1,$$

を満足する $\alpha > 0$ が一意的に定まる．$\alpha \leq 2$ であれば，指数 α の対称な安定分布の ch.f. $\varphi(t) = e^{-\lambda|t|^\alpha}$ が方程式 (2) を満足する．係数 a_j が定数でなく，$X_1, \cdots, X_n$ と独立な確率変数であるとすると —— つまりが a_j がある確率空間 (Ω, $\mathcal{A}$, P) で定義された実数値関数とすると —— 解くべき方程

式は,

(4) $$\varphi(t)=\int_{\Theta}\prod_{j=1}^{n}\varphi(a_j(\theta)t)\,dP(\theta).$$

である. このときは, 関係式 (3) が確率 1 で成り立つことを仮定する. $t=0$ の近傍で $\log\varphi(t)$ が定義されるから, $\log\varphi(0)=0$ となる枝を選ぶと, (4) は,

(5) $$\varphi(t)=\int_{\Theta}\exp\left\{\sum_{j=1}^{n}\log\varphi(a_j(\theta)t)\right\}dP(\theta)$$

となるが, これをさらに一般化して, 方程式

(6) $$\varphi(t)=\int_{\Theta}\exp\int_{-1}^{1}|a|^{-\alpha}\log\varphi(at)\,V(da;\theta)\,dP(\theta),$$

$$|t|<t_0\equiv\sup\left\{|t|\,\middle|\,\varphi(u)\neq 0,\ u<|t|\right\}$$

を考えることができる. ただし, $\{V(\cdot;\theta)\mid\theta\in\Theta\}$ は, 有限区間 $(-1,\ 1)$ 上の確率分布の族である. この方程式を解くために, 実数値関数 $H(x)$, $I(x)$ を

$$\log\varphi(e^{-x})=H(x)+iI(x),$$

$$x>x_0\equiv-\log t_0$$

によって定義する. (6) は, これを少し一般化すれば H および I に関する方程式として,

(7) $$\exp\left\{-e^{-\alpha x}(H(x)+iI(x))\right\}=$$

$$\int_{\Theta} \exp\left\{-e^{-\alpha x}\left(g_0\int_0^\infty H(x+y)\tilde{U}_0(dy;\theta)+ig_1\int_0^\infty I(x+y)\tilde{U}_1(dy;\theta)\right)\right\}dP(\theta),$$
$$x > x_0$$

となる．ただし，$0<g_0\leq 1$，$0<g_1\leq 1$，また $\tilde{U}_0(x;\theta)=U_0^+(x;\theta)-U_0^-(x;\theta)$，と書けて，$U_0^+(x;\theta)$，$U_0^-(x;\theta)$ は x について非減少，かつ $\{U_0^+(x;\theta)+U_0^-(x;\theta)|\theta\in\Theta\}$ は $(0,\infty)$ 上の確率分布の族である．$\tilde{U}_1$ も同様の関数である．(7) から，不等式

$$(8)\qquad \exp\{-e^{-\alpha x}H(x)\}\leqq\int_{\Theta}\exp\left\{-e^{-\alpha x}g_0\int_0^\infty H(x+y)\tilde{U}_0\right\}dP(\theta)$$

が得られる．いま，$H(x)$ に関するゆるい growth condition と，分布

$$G(x)=\int_{\Theta}(U_0^+(x;\theta)+U_0^-(x;\theta))dP(\theta)$$

が平均値をもつことを仮定すると，(8) から $H(x)$ の有界性が得られる．これと，ch.f. $\varphi(t)$ の性質から，$I(x)$ の方も有界であることが導かれる（正確には，$\alpha\neq 1$ なら $I(x)$ が有界，$\alpha=1$ なら，$I(x+u)-I(x)$ が任意に固定した u について有界）．そして，方程式 (7) は誤差項を伴う関数方程式

$$(9)\qquad H(x)=g\int_0^\infty H(x+y)d(G_1(y)-G_2(y))+R(x)\cdot H(x)$$

に帰着する．ただし $0 < q \leq 1$，G_1，G_2 は単調非減少関数で，$G_1(x) + G_2(x)$ が $(0, \infty)$ 上の分布関数，$R(x) = O(e^{-\alpha x})$ である．いまの場合，$H(x)$ は $q = 1$，$G_2(x) \equiv 0$，

$$G_1(x) = \int_{\Theta} (\Pi_0^+(x;\theta) + \Pi_0^-(x;\theta))\,dP(\theta)$$

とおいて得られる方程式 (9) を，そして $I(x)$ の方は (9) において $q = 1$，$H(x) = I(x)$

$$G_1(x) = \int_{\Theta} \Pi_0^+(x;\theta)\,dP(\theta),$$

$$G_2(x) = \int_{\Theta} \Pi_0^-(x;\theta)\,dP(\theta)$$

とおいて得られる方程式を満たすのである．かんたんのため，$V(x)$ が $0, \pm e^{-\rho}, \pm e^{-2\rho}, \cdots$ に集中していないこと，したがって，$G_i(x)$ が格子 $0, \rho, 2\rho, \cdots$ に集中していないことを仮定すると，(9) の解は

$$H(x) = \lambda + A(x)e^{-\alpha x},$$

と書くことができる．ただし λ は実定数（$q < 1$ なら $\lambda = 0$），$A(x)$ は有界な関数である（[8]）．これを (7) に代入すると，両辺から λ を消去することができる．この議論を繰り返して使うと，結局 $A(x) \equiv 0$ を導くことができる．したがって，

$I(x)$ は (7) から $H(x)$ の項をすべて除いて得られる方程式を満たすことになり，ほぼいまと同じ方法によって，$I(x)$ の方も定数であることが導かれるのである．もとの方程式 (4) にもどって，

$$(10) \qquad P_r\{\text{ある } i, j \text{ について } \log|a_j| / \log|a_k| = \text{無理数}\} > 0$$

を仮定すると，(4) の解は，安定分布に限ること，とくに，$\alpha = 2$ の場合には (10) の仮定なしに $\varphi(t) = e^{i\mu t - \frac{\sigma^2}{2}x^2}$ が得られる．

§3．方程式 (6)，(7)，あるいは (9) の確率分布論への応用は広い．そのいくつかをさらにあげる．([3, 5 - 11])．

X_1，$X_2 \cdots$ は互いに独立で，共通の分布 F に従う確率変数の列，$N(=1, 2, 3, \cdots)$ はこれらとは独立な変数で，$E(\log N) < \infty$ であるとする．

$$(X_1 + X_2 + \cdots + X_N) / n^{1/\alpha}$$

が X_1 と同じ分布に従う，という条件は，F の ch. f. を使って，

$$(11) \qquad \varphi(t) = \sum_1^\infty p(n)\, \varphi^n(t/n^{1/\alpha}),$$

と表わされる．ただし $p(n) = P_r\{N = n\}$ である．これは (6)

において Ⓗ$=\{1, 2, \cdots\}$, かつVが一点に退化した場合に相当する. $\alpha \geqq 2$ なら無条件で, また $0<\alpha<2$ なら, $\log N$ が格子 $0, \rho, 2\rho, \cdots$ に集中していない, という条件のもとで, (11) の解は "trivial" なものに限る ([10]):

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1, & \alpha > 2 \\ \exp\left\{-\lambda|t|^{\alpha}\left(1+\beta\frac{t}{|t|}\tan\frac{\pi}{2}\alpha\right)\right\}, & 0<\alpha\leq 2,\ \alpha\neq 1, \\ \exp\{i\mu t-\lambda|t|\}, & \alpha=1, \end{cases}$$

ただし $\lambda>0$, $|\beta|\leq 1$ である. この ch.f. は狭義安定分布と呼ばれる.

X は正の値をとる確率変数, $G_0(x)$ は右連続な単調非減少関数で, $G_0(0)=0$, かつ $\mu\equiv E\{G_0(X)\}<\infty$ とする. $x\geq 0$ に対して

$$R(x) \equiv E\left\{G_0(X-x)\,\middle|\,X>x\right\}-\mu, \tag{12}$$

とおく. $R(x)\equiv 0$ のとき, X (あるいはその分布 F) は G_0 に関する記憶をもたない という. 指数分布 $F(x)=1-e^{-\lambda x}$ がこの性質をもつ. いま正の数 λ と分布 G_1 を

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda x}\,dG_0(x) = \mu,$$

および $dG_1(x) = \mu^{-1} e^{-\lambda x} dG_0(x)$ で定義し，$H(x) = (1 - F(x)) e^{\lambda x}$ とおく．(12) は (9) において，$G_2(x) \equiv 0$ とおいたものと同等である．G_0 の増加点が格子 $0, \rho, 2\rho, \cdots$ に集中していなければ，したがって，G_1 が格子分布でなければ，そして，$|R(x)| \leqq \varepsilon e^{-\delta x}$，であれば $H(x) = const. + A(x) e^{-\delta x}$ と書ける．これより

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x} + \theta \cdot \varepsilon \cdot e^{-\lambda x}$$

と書けることを示すのはよういである．θ は G_0 と θ だけで定まる量である．X が“近似的に” G_0 に関する記憶をもたなければ，X の分布は指数分布に近いということになる．

REFERENCES

[1] Cramér, H., Über eine Eigenshaft der normalen Verteilungsfunktion, *Math. Zeitschr.*, 41(1936), 405-414.

[2] Darmois, G., Analyse generale des liasons stochastiques, *Rev. Inst. Internationale Statist.*, 21(1953), 2-8.

[3] Kagan, A.M., Linnik, Yu.V., and Rao, C.R., *Characterization Problems in Mathmatical Statistics*, J. Wiley, 1973.

[4] Marcinkievicz, J., Sur une propriété de la loi de Gauss., *Math. Zeitschr.*, 44(1939), 612-618.

[5] Shimizu, R., Characteristic functions satisfying a functional equation (I), *Ann. Inst. Statist. Math.*, 20(1968), 187-209.

[6] Shimizu, R., Solution to a functional equation and its application to some characterization problems, *Sankhyā*, A, 40(1978), 319-332.

[7] Shimizu, R., On a lack of memory property of the exponential distribution, *Ann. Inst. Statist. Math.*, 31(1979), 367-372.

[8] Shimizu, R., Functional equation with an error term and the stability of some characterizations of the exponential distribution, *Ann. Inst. Statist. Math.*, 32(1980), 1-16.

[9] Shimizu, R., On the stability of characterizations of the normal distribution, *Statistics and Probability: Essays in Honor of C.R. Rao*, Noth-Holland, 1981, 661-670.

[10] Shimizu, R. and Davies, L., General characterization theorems for the Weibull and the stable distributions, *Sankhyā*, A, 43(1981), 282-310.

[11] Shimizu, R. and Davies, L., On the stability of characterizations of non-normal stable distributions, *Statistical Distributions in Scientific Work*, 4(1981), D. Reidel, 433-446.

[12] Skitovich, V.P., Linear forms in independent random variables and the normal distribution law, *Izvestiia AN SSSR.*, ser Mat., 18(1954), 185-200.